|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| При окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек перешло из рук в руки, если во встрече участвовали 6 специалистов? (6\*5=30) | При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько всего было рукопожатий, если встретились 6 друзей?  В одном рукопожатии равноправно участвуют два человека. 6 друзей объединялись в группы по 2 без учёта порядка следования. Такие группировки (выборки) называются сочетаниями. Число сочетаний определяем по формуле  С62 = 6!/2!/(6 - 2)! = 6!/2!/4! = 5·6/2 = 15. | |
| В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать? Два солиста равноправны. (Может быть, и петь планируют дуэтом.) Нас не волнует порядок следования в группе из 2-ух человек, выбранных из 9-ти. Значит определяем число сочетаний из 9 по 2.  С92 = 9!**/**2!/(9 - 2)! = 9!/2!/7! = 8·9/2 = 36. | В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?  Казалось бы, мы снова выбираем 2-ух человек из 9-ти, но теперь между ними качественная разница. Они будут выполнять разные обязанности в команде. Мы выбираем капитана И заместителя независимо друг от друга. Поэтому применим правило умножения вариантов (И-правило). Из 9-ти человек капитана можно выбрать 9-тью способами. Его заместителя из оставшихся 8-ми человек - 8-мью способами. Общее число вариантов: 9·8 = 72. (Заметьте, что если сначала выбрать заместителя из 9 человек, а потом капитана из оставшихся 8-ми, результат будет тот же.)  Можно рассуждать иначе. Есть два места для капитана и его заместителя, нужно разместить на них 2-ух человек, выбрав их из 9-ти. Такие группировки (выборки) называются размещениями. Число размещений определяем по формуле  А92 = 9!**/**(9 - 2)! = 9!/7! = 8·9 = 72. | |
| Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?  Легко понять, что в этой задаче речь идет о перестановках. 6 гостей занимают все 6 стульев и могут только меняться местами. Число перестановок из 6 определяем по формуле  P6 = 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720. | В понедельник в пятом классе 5 уроков: музыка, математика, русский язык, литература и история. Сколько различных способов составления расписания на понедельник существует? Может быть, не так очевидно, но это тоже перестановки. С точки зрения математики, вообще та же самая задача. Представьте себе, что расписание составляете вы. Чертите таблицу с пятью строками для пяти уроков ("готовите стулья") и вписываете в каждую строку название одного из 5-ти предметов ("рассаживаете гостей"). Число перестановок из 5 определяем по формуле  P5 = 5! = 1·2·3·4·5 = 120. | |
| Пятеро друзей сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно?  В шахматной партии 2 равноправных участника (точно также, как в задаче о рукопожатиях). Значит из 5-ти человек формируем группы по 2 без учета порядка следования - сочетания. Определяем число сочетаний  из 5 по 2.  С52 = 5!/2!/(5 - 2)! = 5!/2!/3! = 4·5/2 = 10. | Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали? На пьедестале почёта находятся 3 команды из 10, и для них очень существенно, кто какое место занял, т.е. порядок следования. Составление групп с учетом порядка следования - размещения. Число размещений определяем по формуле  А103 = 10!**/**(10 - 3)! = 10!/7! = 8·9·10 = 720. Другой способ решения с использованием И-правила, как в задаче 2б. Однако, чем больше выборка, тем удобнее сразу применять готовую формулу. | |
| В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить?  Выбираем три блюда: первое, И второе, И третье. Едим каждое блюдо отдельно (независимо друг от друга). Следовательно, можем применить правило умножения вариантов (И-правило). Из 2-ух первых блюд одно можно выбрать 2-мя способами, из 6-ти вторых одно можно выбрать 6-тью способами, из 4-ёх третьих одно - 4-мя способами. 2·6·4 = 48. | Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?  Чем отличается салат от описанного ранее обеда? Обед едим последовательно, а салат перемешиваем. Выбранные овощи в салате равноправны, очередность их попадания в общее блюдо не важна. Значит наши выборки это сочетания из 6 по 3.  С63 = 6!/3!/(6 - 3)! = 6!/3!/3! = (4·5·6)/(1·2·3) = 20. | |
| В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?  Выбираем одну ручку И один блокнот. Одну ручку из 4-ёх 4-мя способами, один блокнот из 7-ми - 7-ю способами. Применяем правило умножения  4·7 = 28. | В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими способами можно выбрать покупку из двух разных блокнотов и одной ручки?  Выбираем одну ручку И два блокнота. Снова можем применить правило умножения вариантов. Одну ручку из 4-ёх можем выбрать 4-мя способами, два блокнота из 7-ми - **?**способами.  Чтобы определить сколько способов выбора 2-ух блокнов из 7-ми, воспользуемся формулой для числа сочетаний, т.к. для нас несущественно в каком порядке это было сделано.  С72 = 7!/2!/(7 - 2)! = 7!/2!/5! = 6·7/2 = 21.  Теперь применяем правило умножения  4·21 = 84. | |
| На прививку в медпункт отправились 7 друзей. Сколькими разными способами они могут встать в очередь у медицинского кабинета?  Число способов встать в очередь равно числу перестановок 7-ми друзей в пределах этой очереди.  P7 = 7! = 1·2·3·4·5·6·7 = 5040.   Задача такая же, как о гостях и стульях, но обратите внимание, насколько быстро растет число вариантов при увеличении числа переставляемых предметов. | Секретный замок состоит из 4 барабанов, на каждом из которых можно выбрать цифры от 0 до 9. Сколько различных вариантов выбора шифра существует?  а каждом барабане можно выбрать 1-ну цифру из 10-ти 10-тью способами и независимо от других, поэтому применяем правило умножения: 10·10·10·10 = 10000. Можно также считать, что нужно разместить 10 цифр на 4-ёх местах с повторениями. В комбинаторике существует раздел "Выборки с повторениями" ([см. подробнее](http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination_problems.html#note3)). В данном случае нам нужна формула для размещений. Число размещений с повторениями определяется как ***nk***, где n - количество элементов для выбора (здесь n = 10 цифр), k - объём выборки или количество возможных повторов одного элемента (здесьk = 4, одна и та же цифра может быть установлена на всех четырех барабанах). Таким образом, искомое число вариантов 104 = 10000. | |
| Сколько различных трёхзначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).  Трёхзначное число состоит из 3-ёх цифр, которые нам даны. Поскольку цифры не могут повторяться, то получать различные числа можно только путем их перестановки. Число перестановок из 3-ёх определяем по формуле  P3 = 3! = 1·2·3 = 6. | Сколько различных трёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 3, 7? (Цифры могут повторяться).  Если цифры могут повторяться, то по разрядам их можно размещать независимо от друг от друга. Значит можем применить правило умножения вариантов (И-правило). Одну цифру из трёх для разряда сотен можно выбрять 3-мя способами, И одну цифру из тех же трёх для разряда десятков - 3-мя способами, И одну из трёх для разряда единиц - 3-мя способами. Общее число вариантов 3·3·3 = 27. | |
| Сколько различных трёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 7 и 3?  Трёхзначное число из двух цифр неизбежно будет содержать повторения, поэтому можно воспользоваться формулой для числа размещений с повторениями, как в задаче 7b. Здесь количество элементов для выбора n = 2 цифры, количество возможных повторов одного элемента k = 3 раза, цифра в трёхзначном числе может повториться трижды, например, 777. Таким образом, искомое число вариантов  23 = 8. Но можно и проще, так как эта задача полностью аналогична задаче 8b. Также используем И-правило, выбирая одну из 2-ух цифр независимо для каждой из трёх позиций,  2·2·2 = 8.  В свою очередь, в задаче 8b можно было воспользоваться формулой для числа размещений с повторениями: 33 = 27. Дело в том, что формула как раз выводится с применением И-правила и теми же рассуждениями, какие описаны в решении этих задач. | Сколько различных двузначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).  Классический случай размещений: выбираем из 3-ёх элементов без повторов и размещаем на 2-ух позициях - в разряд десятков и в разряд единиц. Число размещений определяем по формуле  А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. | |
| Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).  Искомое число должно оканчиваться цифрой 3, так как 4, 6 и 8 делятся на 2 без остатка. Поэтому позиция единиц у нас уже занята, и остается разместить 3 цифры на 2-ух позициях - десятков и сотен. Число размещений из 3 по 2 определяем по формуле  А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. | Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 6, 5, 0, если цифры в записи числа не могут повторяться?  Сначала определим, сколько всего можно составить групп из 4-ёх заданных цифр по 3 с учётом порядка следования и без повторений.  А43 = 4!**/**(4 - 3)! = 4!/1! = 1·2·3·4/1 = 24. Но не все эти группы будут трёхзначными числами. Те из них, которые начинаются с цифры 0, по существу, - двузначные числа. Сколько таких групп? Если на первом месте стоит 0, то на позициях десятков и единиц располагаются 2 цифры из оставшихся 3-ёх. Определяем число размещений из 3 по 2 А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. Вычитая из общего числа вариантов лишние, получим  24 - 6 = 18. | |
| Сколько четных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).  Трёхзначное число состоит из 3-ёх цифр, которые нам даны. Поскольку цифры не могут повторяться, то получать различные числа можно только путем их перестановки. Число перестановок из 3-ёх определяем по формуле  P3 = 3! = 1·2·3 = 6. | Сколько четных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа могут повторяться).  Если цифры могут повторяться, то по разрядам их можно размещать независимо от друг от друга. Значит можем применить правило умножения вариантов (И-правило). Одну цифру из трёх для разряда сотен можно выбрять 3-мя способами, И одну цифру из тех же трёх для разряда десятков - 3-мя способами, И одну из трёх для разряда единиц - 3-мя способами. Общее число вариантов 3·3·3 = 27. | |
| Сколько различных дробей можно составить с использованием цифр 2, 3, 4? (В числителе и знаменателе не может быть одна и та же цифра.)  Заметим, что не только в числителе и знаменателе не может быть одна и та же цифра, но цифры вообще не могут повторяться, иначе задача не имела бы смысла. В число дробей входили бы, например, 2/3, 2/33, 2/333, 2/3333 и т.п. Таких вариантов бесконечное число.  Далее заметим, что текст "с использованием цифр" может быть понят неоднозначно: с использованием всех трёх или с выбором из них. Здесь рассмотрим более общий случай - с выбором. Выборка не может состоять меньше, чем из двух цифр, чтобы хватило и на числитель, и на знаменатель. Дроби бывают правильные, в которых знаменатель больше числителя, например, 4/23, и неправильные, в которых числитель больше знаменателя, например, 23/4. Таким образом, возможны такие виды дробей \*/\* ИЛИ \*\*/\* ИЛИ \*/\*\*, где звёздочкой обозначено место для одной из заданных цифр. Подсчитаем число вариантов для каждого вида дроби отдельно, а затем сложим результаты в соответствии с ИЛИ-правилом. Случай \*/\* определяется числом размещений из 3 по 2, так как используем не все заданные цифры и важен порядок следования (например, сравните 4/3 и 3/4). А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. Случай \*/\*\* определяется числом перестановок из 3, так как для такой дроби нужно использовать все заданные цифры. Дроби будут различаться только расположением цифр по позициям.  P3 = 3! = 1·2·3 = 6. Случай \*\*/\* аналогичен предыдущему, также определяется числом перестановок из 3. P3 = 6.  Общее число вариантов 6 + 6 + 6 = 18. | | |
| На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?  Определим общее число перестановок из 30 элементов по формуле P30=30! Чтобы вычислить число "лишних" перестановок, сначала определим, сколько вариантов, в которых 2-й том находится рядом с 1-ым справа от него. В таких перестановках 1-ый том может занимать места с первого по 29-е, а 2-й со второго по 30-е - всего 29 мест для этой пары книг. И при каждом таком положении первых двух томов остальные 28 книг могут занимать остальные 28 мест в произвольном порядке. Вариантов перестановки 28 книг P28=28! Всего "лишних" вариантов при расположении 2-го тома справа от 1-го получится 29·28! = 29!.  Аналогично рассмотрим случай, когда 2-й том расположен рядом с 1-ым, но слева от него. Получается такое же число вариантов 29·28! = 29!. Значит всего "лишних" перестановок 2·29!, а нужных способов расстановки 30!−2·29! Вычислим это значение. 30! = 29!·30; 30!−2·29! = 29!·(30−2) = 29!·28.  Итак, нам нужно перемножить все натуральные числа от 1 до 29 и еще раз умножить на 28.  **Ответ:** 2,4757335·1032. | | Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии 30-ти книг?  Определим общее число размещений из 30 элементов по 15 по формуле  A3015 = 30·29·28·...·(30−15+1) = 30·29·28·...·16 = 202843204931727360000. **Ответ:** 202843204931727360000. |
| Сколькими способами можно расставить 30 книг на двух полках, если на каждой из них помещается только по 15 томов?  Мы решаем эту задачу в контексте работы дизайнера интерьеров, поэтому порядок следования на полке 15-ти выбранных внешне одинаковых книг не имеет значения. Нужно определить общее число сочетаний из 30 элементов по 15 по формуле  С3015 = 30!/(30 − 15)!/15! = 155117520. **Ответ:** 155117520. | | Сколькими способами можно расставить 30 внешне неразличимых книг на двух полках, если на каждой из них помещается только по 15 томов?  Если мы снова отвечаем на этот вопрос с точки зрения дизайнера интерьеров, то порядок следования книг на каждой из полок несущественен. Но заказчику может быть важно или неважно, как книги распределены между полками.  1) Например, если обе полке находятся рядом, обе открыты, обе на одинаковой высоте, то заказчик может сказать, что это неважно. Тогда ответ очевиден - 1 способ, так как при расстановке используется всё множество из 30-ти книг, и никакие перестановки не учитываются. 2) Но когда одна из полок находится слишком высоко, заказчику важно какие книги на ней расположены. В этом случае ответ будет такой же, как в предыдущей задаче - 155117520 способов, потому что первую полку заполняем выборками-сочетаниями из 30 по 15, а на вторую помещаем остальные 15 книг без учёта перестановок. |
| Из аквариума, в котором 6 сазанов и 4 карпа, сачком выловили 5 рыб. Какова вероятность того, что среди них окажется 2 сазана и 3 карпа?  Элементарное событие - "в сачке группа из 5 рыб". Событие A - "среди 5 пойманных рыб оказалось 3 карпа**и** 2 сазана".  Пусть *n* - общее число всех возможных элементарных событий, оно равно числу способов сгруппировать по 5 рыб. Всего рыб в аквариуме 6 + 4 = 10. В процессе ловли сачком рыбы внешне неразличимы. (Мы не знаем, выловили ли мы рыбу по имени Баська или по имени Коська. Более того, пока мы не вытащили сачок наверх и не заглянули в него, мы даже не знаем сазан это или карп.) Таким образом, "выловить 5 рыб из 10" означает сделать выборку типа сочетания из 10 по 5.  *n* = *С105* = 10!/5!/(10 - 5)!  Вытащив сачок и заглянув в него, мы можем определить благоприятствующий это исход или нет, т.е. состоит ли улов из двух групп - 2 сазана и 3 карпа?  Группа сазанов могла сформироваться выбором из 6 сазанов по 2. Причем всё равно, кто из них первым забрался в сачок, а кто вторым, т.о. это выборка типа сочетания из 6 по 2. Обозначим общее число таких выборок *m1* и вычислим его. *m1* = *С62* = 6!/2!/(6 - 2)!  Аналогично общее число возможных групп по 3 карпа определяется числом сочетаний из 4 по 3. Обозначим его *m2*. *m2* = *С43* = 4!/3!/(4 - 3)!  Группы карпов и сазанов формируются в сачке независимо друг от друга, поэтому для подсчёта числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, используем правило умножения ("и"-правило) комбинаторики. Итак, общее число благоприятствующих элементарных событий  *m = m1·m2* = *С62*·*С43*  Вероятность события А определяем по формуле P(A) = *m/n = С62·С43/С105* Подставляем в эту формулу все значения, расписываем факториалы, сокращаем дробь и получаем ответ: P(A) = 6!·4!·5!·(10 - 5)!/2!/(6 - 2)!/3!/(4 - 3)!/ 10! = 5/21 ≈ 0,238  **Замечания.** 1) Сочетания обычно встречаются в задачах, где неважен процесс формирования группы, а важен только результат. Сазану Баське без разницы первым он попал в сачок или последним, но ему очень важно, в какой группе он оказался в итоге - среди тех, кто в сачке, или среди тех, кто на свободе. 2) Обратите внимание, мы используем "и-правило", потому что союз "и" стоит непосредственно в описании события А, для которого нужно вычислить вероятность совместного улова двух групп. Однако, применяем его только после того, как убедились в независимости выборок. В самом деле, не может же сазан, подплывая к сачку, пересчитать там своих собратьев, и сказать карпу: "Твоя очередь, наших там уже двое". Да и согласится ли карп лезть в сачок в угоду сазану? Но если бы они могли договориться, то это правило применять было бы уже нельзя. Надо было бы обратиться к понятию условная вероятность.  **Ответ:** 0,238. | | |

***Правило сложения****(правило «****или****»). Оно утверждает, что, если элемент A можно выбрать*n*способами, а элемент B можно выбрать*m*способами, то выбрать A****или****B можно****n + m****способами.*

***Правило умножения****(правило «****и****»). Согласно ему, если элемент A можно выбрать*n*способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать*m*способами, то пару A****и****B можно выбрать****n·m****способами.*